惑星の運動

惑星の運動を式で表す。

運動は引力の方向と、速度の方向でできる平面上で起きるので、その平面上で考える。

その平面を複素平面だと考え、引力の中心を原点として惑星の位置を

$$\left(1\right)　　p=re^{iθ}$$

とする。時間 $t$ で微分して

$$\left(2\right)　　v=\frac{dr}{dt}e^{iθ}+r\frac{dθ}{dt}ie^{iθ}$$

$$\left(3\right)　　a=\frac{d^{2}r}{dt^{2}}e^{iθ}+2\frac{dr}{dt}\frac{dθ}{dt}ie^{iθ}+r\frac{d^{2}θ}{dt^{2}}ie^{iθ}-r\left(\frac{dθ}{dt}\right)^{2}e^{iθ}$$

$$\left(4\right)　　a=\left(\frac{d^{2}r}{dt^{2}}-r\left(\frac{dθ}{dt}\right)^{2}\right)e^{iθ}+\left(2\frac{dr}{dt}\frac{dθ}{dt}+r\frac{d^{2}θ}{dt^{2}}\right)ie^{iθ}$$

ここで、引力は $p$ 方向にのみ作用するため $ie^{iθ}$ の成分はゼロになり、 $e^{iθ}$ の成分は引力なので $r$ の2乗に反比例するとして、

$$\left(5\right)　　\left(\frac{d^{2}r}{dt^{2}}-r\left(\frac{dθ}{dt}\right)^{2}\right)=\frac{-k}{r^{2}}$$

$$\left(6\right)　　\left(2\frac{dr}{dt}\frac{dθ}{dt}+r\frac{d^{2}θ}{dt^{2}}\right)=0$$

ここで、 $k$ は引力の定数であり、軌道によらない。

ここで、(6)から

$$\left(7\right)　　\left(2\frac{dr}{dt}\frac{dθ}{dt}+r\frac{d^{2}θ}{dt^{2}}\right)=\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^{2}\frac{dθ}{dt}\right)=0$$

$$\left(8\right)　　r^{2}\frac{dθ}{dt}=C$$

となる。ここで、 $C$ は一定(軌道によるが、一つの軌道では一定)の面積速度を表す。

つぎに、(4), (5), (8)から

$$\left(9\right)　　a=\left(\frac{d^{2}r}{dt^{2}}-r\left(\frac{dθ}{dt}\right)^{2}\right)e^{iθ}=\frac{-k}{r^{2}}e^{iθ}=\frac{-k}{C}\frac{dθ}{dt}e^{iθ}=\frac{k}{C}i\frac{d}{dt}e^{iθ}$$

だから、積分定数を $L$ として

$$\left(10\right)　　v=\frac{k}{C}ie^{iθ}+L$$

となる。

ここで、 $θ$ の方向を適当にとれば、 $L$ は純虚数にとることができる。それを $iL$ とすると、

すなわち、

$$\left(11\right)　　v=\frac{dr}{dt}e^{iθ}+r\frac{dθ}{dt}ie^{iθ}=\frac{k}{C}ie^{iθ}+iL$$

$e^{-iθ}$ を掛けて

$$\left(12\right)　　\frac{dr}{dt}+r\frac{dθ}{dt}i=\frac{k}{C}i+Lie^{-iθ}$$

ここで、複素表示をやめて (x, y) 表示に直すと、

$$\left(13\right)　　\frac{dr}{dt}=L\sin(θ)$$

$$\left(14\right)　　r\frac{dθ}{dt}=\frac{k}{C}+L\cos(θ)$$

$$\left(15\right)　　r^{2}\frac{dθ}{dt}=C$$

から

$$\left(16\right)　　r\frac{C}{r^{2}}=\frac{C}{r}=\frac{k}{C}+L\cos(θ)$$

$$\left(17\right)　　r\left(\frac{k}{C}+L\cos(θ)\right)=C$$

あるいは

$$\left(18\right)　　r\left(1+L\frac{C}{k}\cos(θ)\right)=\frac{C^{2}}{k}$$

これは、

$$\left(19\right)　　\left|L\frac{C}{k}\right|<1$$

の時、楕円となる。

$r$ の最小値は

$$\left(20\right)　　\frac{C^{2}}{k}/\left(1+L\frac{C}{k}\right)$$

$r$ の最大値は

$$\left(21\right)　　\frac{C^{2}}{k}/\left(1-L\frac{C}{k}\right)$$

となり、

長半径は

$$\left(22\right)　　\left\{\frac{\frac{C^{2}}{k}}{\left(1+L\frac{C}{k}\right)}+\frac{\frac{C^{2}}{k}}{\left(1-L\frac{C}{k}\right)}\right\}/2=\frac{C^{2}}{k}\frac{1}{\left(1-\left(L\frac{C}{k}\right)^{2}\right)}$$

短半径は

$$\left(23\right)　　\sqrt{\left\{\frac{\frac{C^{2}}{k}}{\left(1+L\frac{C}{k}\right)}×\frac{\frac{C^{2}}{k}}{\left(1-L\frac{C}{k}\right)}\right\}}=\frac{C^{2}}{k}\frac{1}{\sqrt{1-\left(L\frac{C}{k}\right)^{2}}}$$

楕円の面積は長半径×短半径×πだから

$$\left(24\right)　　\frac{C^{2}}{k}\frac{1}{\left(1-\left(L\frac{C}{k}\right)^{2}\right)}×\frac{C^{2}}{k}\frac{1}{\sqrt{1-\left(L\frac{C}{k}\right)^{2}}}×π=\left(\frac{C^{2}}{k}\right)^{2}\frac{1}{\left(1-\left(L\frac{C}{k}\right)^{2}\right)^{^{3}/\_{2}}}×π$$

周期は面積÷面積速度だから

$$\left(25\right)　　\left(\frac{C^{2}}{k}\right)^{2}\frac{1}{\left(1-\left(L\frac{C}{k}\right)^{2}\right)^{^{3}/\_{2}}}×π÷C=\left(\frac{C^{2}}{k}\right)^{^{3}/\_{2}}\frac{1}{\left(1-\left(L\frac{C}{k}\right)^{2}\right)^{^{3}/\_{2}}}×π×\frac{1}{\sqrt{k}}=\left(\frac{C^{2}}{k}\frac{1}{1-\left(L\frac{C}{k}\right)^{2}}\right)^{^{3}/\_{2}}×\frac{π}{\sqrt{k}}$$

となり、周期は長半径の3/2乗に比例することが分かる。